Zadania na listopad 2002 (grupa "STARSZYCH")

Zadanie 1. Wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b, p, q takie, że równość

$$(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$$

zachodzi dla wszyskich $x \in \mathbb{R}$

Zadanie 2. Niech $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ będą dwiema permutacjami elementów zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\}$ takimi, że

$$a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq \cdots \geq a_n + b_n.$$

Udowodnić, że $a_m + b_m \leq \frac{4}{m}$ dla $m = 1, 2, \ldots, n$.

Zadanie 3. Punkt K jest punktem styczności okręgu o wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AC. Wykazać, że prosta łącząca środek boku AC ze środkiem okręgu o dzieli odcinek BK na dwie równe części.

Zadanie 4. Przekątne dzielą wypukły czworokąt na cztery trójkąty. Wykazać, że jeśli promienie okręgów wpisanych w te trójkąty są równe, to czworokąt jest rombem.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $0 < a < b$, to dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ zachodzi nierówność:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie układy parami różnych liczb całkowitych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dla których wielomian
a) $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) - 1$
b) $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) + 1$
jest iloczynem wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.

Zadanie 7. Wykazać, że jeśli wielomian $w(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite oraz $w(0)$ i $w(1)$ są liczbami nieparzystymi, to $w(x)$ nie ma całkowitych pierwiastków.

Zadanie 8. Wykazać, że jeśli wielomian $w(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite, $|\,w(p)\,| = |\,w(q)\,| = 1$ dla pary liczb całkowitych $p > q$ oraz $w(x)$ ma pierwiastek wymierny a, to $p - q$ jest równe 1 lub 2 oraz $a = \frac{p+q}{2}$.

Zadanie 9. Niech (a) oznacza część ułamkową liczby a (np. (1,41)=0,41). Wykazać, że liczby $(10^n\sqrt{2})$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$ są parami różne.

Zadanie 10. Ciąg liczb $a_0, a_1, \ldots, a_n$ określony jest warunkami: $a_0 = \frac{1}{2}$ oraz $a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

Zadanie 11. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $A(x), B(x), C(x), D(x)$ spełniające dla wszyskich $x \in \mathbb{R}$ warunki:
a) $A(0) = 0$, $A(x) = \frac{1}{2}(A(x+1) + A(x-1))$,
b) $xB(x-1) = (x-2)B(x)$,
c) $C(x^2) = (C(x))^2$,
d) $D(x^2 - 2x) = (D(x-2))^2$.

Zadanie 12. Czy istnieje różnowartościowa funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla wszystkich x nierówność:

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}.$$