Seria na styczeń 2003 (grupa "MŁODSZYCH")

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb pierwszych, których iloczyn jest pięciokrotnie większy od sumy.

Zadanie 2. Dla danej liczby dodatniej a, niech $f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x}+a}$. Obliczyć wartość sumy

$$f(\frac{1}{2003}) + f(\frac{2}{2003}) + \cdots + f(\frac{2002}{2003}).$$

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m liczba $2^{6m+1} + 3^{6m+1} + 5^{6m} + 1$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli długości a, b, c boków trójkąta spełniają równość

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c},$$

to jeden z kątów tego trójkąta jest równy $60°$.

Zadanie 5. Dla danej liczby naturalnej k wyznaczyć wszystkie liczby $x \in \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$(x^{2k} + 1)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k-2}) = 2kx^{2k-1}.$$

Zadanie 6. Znaleźć wzajemne położenie sześcianu o krawędzi a oraz płaszczyzny π przy którym pole rzutu prostopadłego sześcianu na płaszczyznę π jest największe.

Zadanie 7. Niech m, n będą liczbami względnie pierwszymi spełniającymi równość

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} = \frac{m}{n}.$$

Czy liczba m jest podzielna przez 5?

Zadanie 8. Dwa wypukłe wielokąty $A_1A_2 \ldots A_n$ i $B_1B_2 \ldots B_n$ spełniają zależność

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{0}.$$

Wykazać, że

(a) wielokąty $A_1A_2 \ldots A_n$ i $B_1B_2 \ldots B_n$ mają wspólne punkty,

(b) wielokąt $A_1A_2 \ldots A_n$ można obrócić tak, że otrzymany wielokąt $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ spełnia warunki: $A'_1A'_2 \perp B_1B_2$ oraz $\overrightarrow{A'_1B_1} + \overrightarrow{A'_2B_2} + \cdots + \overrightarrow{A'_nB_n} = 0$.

Zadanie 9. Na płaszczyźnie dany jest kąt AOB. Okrąg o_1 jest styczny do prostej OA w punkcie A, zaś okrąg o_2 jest styczny do prostej OB w punkcie B oraz do okręgu o_1 w punkcie P. Wyznaczyć wszystkie możliwe położenia punktu P.

Zadanie 10. Na płaszczyźnie danych jest 2003 kątów, których suma miar jest równa $359°$. Czy można te kąty rozmieścić tak, aby pokrywały one całą płaszczyznę?

Zadanie 11. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $\frac{3n+1}{n(2n-1)}$ ma przedstawienie w postaci skończonego ułamka dziesiętnego?

Zadanie 12. Dany jest ciąg liczb

$$\frac{1}{2k} = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0,$$

gdzie k jest liczbą naturalną oraz $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Wykazać, że ciąg zawiera przynajmniej k wyrazów większych od $\frac{1}{4k}$.

Zadanie 13. Czy 333 odważniki o wagach $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 333^2$ odpowiednio, można podzielić na trzy grupy o równej łącznej wadze?