Seria na styczeń 2003 (grupa "STARSZYCH")

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należą do przedziału $[0,1]$, to

$$\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(n - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i^2}\right) \le \frac{n^2}{4}.$$

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz nieujemnej liczby całkowitej k równanie

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x_i oraz y.

Zadanie 3. Wykazać, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Zadanie 4. Dla liczby a z przedziału $(0,1)$ definiujemy funkcję $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 0 \le x \le a, \\ 1 - (\sqrt{ax} + \sqrt{(1-a)(1-x)})^2 & \text{jeśli } a \le x \le 1. \end{cases}$$

oraz ciąg $\{a_n\}$ kładąc $a_1 = f(1)$ oraz $a_n = f(a_{n-1})$, dla $n > 1$. Udowodnić, że $a_k = 0$ dla pewnej liczby naturalnej k.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające układ równań

$$\begin{cases} \frac{4x_1^2}{1+4x_1^2} = x_2 \\ \frac{4x_2^2}{1+4x_2^2} = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{4x_{n-1}^2}{1+4x_{n-1}^2} = x_n \\ \frac{4x_n^2}{1+4x_n^2} = x_1 \end{cases}$$

Zadanie 6. Niech $f(n)$ oznacza liczbę permutacji $a_1, a_2, \ldots, a_n$ liczb $1, 2, \ldots n$ takich, że
(a) $a_1 = 1$,
(b) $|a_i - a_{i+1}| \le 2$, dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
Wykazać, że ciąg reszt z dzielenia przez 3 liczb $f(n)$ jest okresowy i obliczyć resztę z dzielenia przez trzy liczby $f(2003)$.

Zadanie 7. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_m$ będzie danym ciągiem dodatnich liczb wymiernych takim, że $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$. Dla liczby naturalnej n niech $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} [r_k n]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(n)$.

Zadanie 8. Wewnątrz kwadratu o boku 1 narysowano nie przecinającą się ze sobą łamaną o długości 1000. Wykazać, że istnieje prosta równoległa do pewnych boków kwadratu przecinająca łamaną w przynajmniej 500 punktach.

Zadanie 9. Wewnątrz kwadratu o boku 1 narysowano łamaną o długości l tak, że każdy punkt kwadratu jest oddalony od pewnego punktu łamanej o nie więcej niż ϵ (ϵ jest pewną liczbą dodatnią). Wykazać, że $l \ge \frac{1}{2\epsilon} - \frac{\pi}{2}\epsilon$.

Zadanie 10. Wewnątrz kwadratu o boku 1 umieszczono n^2 punktów. Wykazać, że istnieje łamana zawierająca wszystkie umieszczone punkty, której długość jest nie większa niż: a) $2n+1$, b)* $2n$.

Zadanie 11. Wewnątrz kwadratu o boku 100 położona jest łamana L taka, że każdy punkt kwadratu jest oddalony od L o nie więcej niż $0,5$. Wykazać, że łamana L zawiera dwa punkty odległe od siebie o nie więcej niż 1, ale droga wzdłuż łamanej łącząca te punkty ma długość nie mniejszą niż 198.

Zadanie 12. Rzuty prostokątne wielokąta W na osie układu współrzędnych mają długości a i b. Wykazać, że wielokąt W ma obwód nie mniejszy niż $\sqrt{2}(a+b)$.

Zadanie 13. Wewnątrz wielokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_n$wybrano punkt O. Wykazać, że dla pewnej pary liczb $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ zachodzą nierówności

$$\pi\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq \angle A_iOA_j \leq \pi.$$

Zadanie 14. Siedmiokąt $A_1A_2\ldots A_7$ jest wpisany w okrąg o. Wykazać,że jeśli środek okręgu o leży wewnątrz siedmiokąta, to suma kątów przy wierzchołkach A_1, A_3 i A_5 jest mniejsza od $450°$.

Zadanie 15. Przekątne wypukłego czworokąta mają długości $2a$ i $2b$. Wykazać, że przynajmniej jeden z boków tego czworokąta ma długość nie mniejszą niż $\sqrt{a^2+b^2}$.