Seria na styczeń i luty 2006

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli długości krawędzi czworościanu $ABCD$ spełniają zależność:
$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2,$$
to przynajmniej jedna ze ścian czworościanu jest trójkątem ostrokątnym.

Zadanie 2. Niech liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnie $(n \geqslant 2)$. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań:
$$\begin{cases} x_1x_2 = a_1 \\ x_2x_3 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}x_n = a_{n-1} \\ x_nx_1 = a_n \end{cases}$$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n dla których istnieją liczby naturalne x i $k > 1$ takie, że $2^n - 1 = x^k$.

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań:
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3\ . \end{cases}$$

Zadanie 5. Niech $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ będą ciągami określonymi przez warunki:
$$\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3 \ldots); \\ y_0 = 1,\ y_1 = 7,\ x_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3 \ldots). \end{cases}$$
Wykazać, że oprócz jedynki żadna inna liczba nie jest jednocześnie wyrazem obu tych ciągów.

Zadanie 6. Niech $ABCD$ będzie takim czworościanem, że $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Wykazać, że wszystkie ściany czworościanu są trójkątami ostrokątnymi.

Zadanie 7. Punkty P i Q leżą wewnątrz czworościanu foremnago $ABCD$. Wykazać, że kąt $\angle PAQ$ ma miarę mniejszą od $60°$.

Zadanie 8. Wykazać, że dla dodatnich liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 zachodzi nierówność:
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

Zadanie 9. W grupie n osób są sami nieznajomi. Wykazać, że osoby tej grupy można zapoznać tak, że nie będzie trójki osób mających taką samą liczbę znajomych.

Zadanie 10. W trapez $ABCD$ można wpisać koło. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych, zaś r_1, r_2, r_3, r_4 promieniami okręgów wpisanych w trójkąty BAE, BCE, CDE i DAE odpowiednio. Wykazać, że
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$